

DESCRIPCION DEL PROYECTO: Álgebra, Lógica y Categorías

DIRECTOR

Sagastume, Marta Susana, Profesor Titular, Dto. de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nac. de La Plata, La Plata, Argentina.

CODIRECTOR

Lewin, Renato, Profesor Titular, Fac. de Matemáticas, Universidad Católica de Chile.

INVESTIGADORES INTEGRANTES

- Ertola, Rodolfo, Profesor Adjunto, Facultad de Humanidades y Cs. De la Educación, UNLP.
- Menni, Matías, Profesor Adjunto, Dto. de Matem., Facultad de Cs. Exactas, UNLP.
- Castiglioni, José Luis, Profesor Adjunto, Dto. de Matem., Facultad de Cs. Exactas, UNLP.
- Galli, Adriana Claudia, Profesor Adjunto, Dto. de Matem., Facultad de Cs. Exactas, UNLP.

MARCO GENERAL DEL TEMA:

Al demostrar la completud del cálculo infinitovalente de Lukasiewicz, Chang introdujo como semántica algebraica la estructura de MV-álgebra y vinculó las MV-álgebras totalmente ordenadas con los grupos abelianos totalmente ordenados. Posteriormente Mundici extiende esta vinculación y define una equivalencia categorial entre la clase de los grupos reticulados o *l-grupos* con unidad y la de las MV-álgebras. En los trabajos de W.Blok y D.Pigozzi sobre lógicas algebrizables se estudia una generalización del concepto de álgebra de Lindenbaum asociada a una lógica dada. De este modo se consigue extender la asociación “lógica-estructura algebraica” a algunas lógicas para las cuales no era posible encontrar una estructura algebraica correspondiente.

Un sistema alternativo al de la lógica clásica es el intuicionista. La lógica intuicionista ha adquirido una importancia adicional a partir del descubrimiento de sus relaciones con la teoría de categorías, especialmente la teoría de topos. Un problema que se plantea naturalmente es el de encontrar el análogo intuicionista de las funciones booleanas de la lógica clásica o, en otras palabras, una definición adecuada de “conectivo intuicionista”. Caicedo propone una definición a partir de la semántica dada por los haces sobre espacios topológicos. Posteriormente, Cignoli y Caicedo han estudiado el concepto desde el punto de vista de la semántica algebraica de las álgebras de Heyting (ver ([2],[3],[5])). Las funciones que merecen el nombre de conectivo intuicionista satisfacen cierta propiedad básica que, mirada desde el punto de vista algebraico, expresa la compatibilidad de dichas funciones con todas las congruencias en cada álgebra de Heyting dada. Los polinomios son el primer ejemplo de función compatible, pero no toda función compatible es un polinomio. En caso de serlo, el álgebra se llama *afinmente completa*. Se conocen algunos resultados de variedades de álgebras afinmente completas o *localmente afin completas*. Caicedo-Cignoli estudian extensiones axiomáticas del cálculo intuicionista por conectivos implícitos en relación a la completud algebraica, que depende de la compatibilidad de las funciones asociadas a los conectivos.

APORTES ORIGINALES:

El grupo de Álgebra de la Lógica, (Proyecto Lógica Algebraica y Categórica), inició sus trabajos hace algún tiempo estudiando el aspecto algebraico asociado a diversos cálculos lógicos como el de Moisil, de Lukasiewicz finitovalente y de Nelson. Se abordó también el aspecto semántico, desde el punto de vista de los modelos de Kripke. Esto llevó a estudiar el aspecto categorial de la completud de algunos cálculos lógicos, mediante el funtor doble dual (ver [11]). Se demostró posteriormente, utilizando métodos categoriales de Makkai, la amalgamación fuerte para varias categorías de álgebras vinculadas a la Lógica (álgebras de

Heyting simétricas, álgebras de Lukasiewicz n -valuadas, álgebras S_4). Se extendieron resultados de Pitts en el sentido de que la propiedad de amalgamación fuerte implica la propiedad de Beck-Chevalley para filtros. Como corolario, surgen formas no conocidas del teorema de interpolación de Craig para las lógicas correspondientes (ver [12]).

A posteriori se ha venido estudiando, entre otros temas, el del aspecto algebraico de la lógica L infinitovaluada de Lukasiewicz, dado por las MV -álgebras y su vinculación con los grupos reticulados o l -grupos. En este sentido se definió el sistema deductivo Bal , que es algebrizable y cuya semántica algebraica son los l -grupos (ver[7]). También se han estudiado las MV^* -álgebras definidas por C.C.Chang, que son la contraparte algebraica de la lógica L^* con valores de verdad positivos y negativos. Sus conectivos extienden al intervalo real $[-1, 1]$ los originalmente definidos por Lukasiewicz en el intervalo $[0, 1]$. Se obtuvo una axiomatización L^*_0 de las fórmulas paraconsistentes de L^* y se demostró su completud (ver[16]). Se demostró que existe una equivalencia categorial entre las categorías de MV -álgebras y MV^* -álgebras (ver [17] y [18]).

En colaboración con R. Ertola y A. Galli se aplicaron resultados de [13], [14], [15] y se obtuvieron algunos resultados sobre funciones compatibles en lógica minimal, en la lógica proposicional modal simétrica de Moisil y en las de Lukasiewicz n -valentes que serán publicados en Logic Journal of IGPL.

Bibliografía

1. Blok, W.j., Pigozzi, D. *Algebrizable Logics*. Memoirs of the A.M.S. N° 396, vol 77, (1989) Amer. Math. Soc., Providence.
2. Caicedo, X. *Investigaciones acerca de los conectivos intuicionistas*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 19, (1995) pp. 705-716.
3. Caicedo, X. *Conectivos sobre espacios topológicos*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, 21, (1997) pp. 521-534.
4. Caicedo, X. *Implicit connectives of algebrizable logics*, Preprint, 2003.
5. Caicedo, X., Cignoli, R. *An algebraic approach to intuitionistic connectives*. The Journal of Symbolic Logic, vol.66, No 4, 2001.
6. Cignoli, R. Dóttaviano I.M.L., Mundici, D., *Algebraic foundations of many-valued reasoning*. Kluwer, Dordrecht. (Trends in Logic, Studia Logica Library). 2000.
7. Cignoli, R., Torrens, A. *Glivenko like theorems in natural expansions of BCK-logic*, Math. Log. Quart. 50, N° 2, 111-125 (2004).
8. A.Galli, R. Lewin, M.Sagastume, *The Logic of Equilibrium and Abelian Lattice Ordered Groups*. Arch. Math Logic 43 (2004), 141-158.
9. Galli, A., Reyes, G.E and M. Sagastume, *Completeness theorems via double dual functor*, Studia Logica, 63, (1999), 1-21.
10. Galli, A., Reyes, G.E and M. Sagastume, *Strong Amalgamation, Beck-Chevalley for equivalence relations and Interpolation in Algebraic Logic*, Fuzzy Sets and Systems, 138 (2003) 3-23.
11. Galli, A., Sagastume, M. *Symmetric-intuitionistic connectives*. En: Models, Algebras and Proofs. Selected papers X SLALM. C. Montenegro, X. Caicedo (eds.) Marcel Dekker, New York. (Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics), (1999) 267-279.
12. Galli, A., Sagastume, M. *Some operators in Kripke models with an involution*, Journal of Applied Non-Classical Logics, Vol 9, N° 1, (1999), 107-121.
13. Lewin, R., Sagastume, M., *Paraconsistency in Chang's Logic with Positive and Negative Truth Values* PARACONSISTENCY: THE LOGICAL WAY TO THE INCONSISTENT (W. A. Carnielli, M. E. Coniglio, I.M.L.Dóttaviano, Eds.), Marcel Dekker, 2002, 381--396.
14. Lewin, R., Sagastume, M., Massey, P., *MV^* -Algebras* (aceptado para su publicación en Logic Journal of IGPL).
15. Lewin, R., Sagastume, M., Massey, P., *Chang's L^* Logic* (aceptado para su publicación en Logic Journal of IGPL).